幾何種数の計算公式と楕円型特異点について : 総合報告、その他(多様体の特異点の最近の成果)

泊, 昌孝

数理解析研究所講究録
535巻 1984年 257-289

幾何種数の計算公式と楕円型特異点について（総合報告，その他）

京大数理研　泊　昌孝　(Masataka Tomari)

この話は[12]に続いて2次元正規特異点／$\mathbb{C}$の不変量に関するものである。結果は，Laufer－Yau の結果のいくつかの発展と，それらのつながりについての再認識である。そしてある不変量の関係式（ $L=p_g$ ）を満たす特異点の resolution process の言葉による特徴づけを中心にして，3つの部分からなる。Iは不変量のみの話であり中心は定理（2,4）である。これは Stephen Yau の定理（1,8）を自分なりに消化して得たもので，特に，ある resolution 上で fundamental cycle Z_0 と maximal ideal cycle が一致する特異点について $p_a(Z_0)=\dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/m\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ が成立することがわかる。dual graph よりきまる $p_a(Z_0)$ が $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ をこの等式の意味で制限する。実際，後に（§9,10）極大楕円型特異点がある特殊な resolution process を有する事を導く。次にIIでは，楕円型特異点の resolution process についての基礎を述べます。p_g の計算，p_a を固

定して特異点のHilbert関数も制限すること，Zariski's canonical resolutionに於けるdualizing sheafの計算，そしてelliptic sequenceが論じられる。更に筆者はⅢで話題となる定理により「1次元特異点nodeとcuspに対応する2次元特異点が最小楕円型特異点ならば，1次元2重点に対応するものはresolution processの類似性からはGorenstein特異点に限ると $L = p_g$ を満たす特異点である」と結論づけたい。

以上Ⅱの詳細はプレプリント[14]を見て下さい。また，実際の講演では全く触れられなかった§8，9についても書かせていただきます。

Ⅰ. 正規2次元特異点の不変量について.

§1. p_a, p_g, そして $p_a(Z_0)$. 1). (V, p) と書けば a germ of normal 2-dim complex space V with a reference point p（以下，2次元正規特異点と呼ぶ）をあらわし，$\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ で，A を例外集合とする特異点 (V, p) の resolution をあらわす。この時，特異点 (V, p) の geometric genus（幾何種数）とは整数 $p_g(V, p) = \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ のことである。また，arithmetic genus（算術種数）とは整数 $p_a(V, p) = \max\{\, p_a(D) \mid D$: non-zero effective divisor on $\tilde{V}$ s.t. D の台 $|D| \subseteq A \,\}$ である。ただし，$p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$ とする。

その他の記号は大体 Wagreich [15] のものに従う（[6], [12] も参）。そして，V を適当な Stein 近傍にとるというようなこともいちいち断らずに行なうことにする。まず，最も基本的な事からおもい出してゆきましょう。

2）<u>命題</u> p_g 及び p_a は resolution のとり方に依らない。[15]

3）<u>命題</u> [15]，$p_a(V,p) \leqq p_g(V,p)$ である。

4）<u>定義</u> [2]．$\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ を正規2次元特異点の resolution とし，$A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ という具合に既約成分に分解されているとせよ。この時，集合 $\{ D > 0 \mid D : \text{divisor on } \tilde{V},\ |D| \subseteq A,\ D \cdot A_j \leqq 0 \ \ \forall j \}$ の中の最小元 Z_0 を <u>fundamental cycle</u> と呼ぶ。

5）<u>注意</u> (i) fundamental cycle は任意の ψ に対して必ず存在して unique である。(ii) [6] Laufer の computation sequence for Z_0 により $H^0(\mathcal{O}_{Z_0}) \cong \mathbb{C}$，特に $p_a(Z_0) = \dim H^1(\mathcal{O}_{Z_0})$ である。だから $0 \leqq p_a(Z_0) \leqq p_a \leqq p_g$ が成立している。

6）<u>命題</u> (i) [2] $p_a(Z_0) = 0$ ならば $p_a = 0$。(ii) [1,2] $p_a = 0$ ならば $p_g = 0$。(iii)（[15] 及びその他の人々，本稿の (8,5) も参）$p_a(Z_0) = 1$ ならば $p_a = 1$。(iv) (G※ → P31 を見よ) $p_a = 1$ でも p_g はいくらでも大きくなり得る。(v) [11] $p_a(Z_0) \geqq 2$ の時，$p_a(Z_0)$ を固定しても p_a はいくらでも大きくなり得る。 ||

これに対して，Gorenstein である時，次の結果が得られて

いた。

7) 定理(大柳一吉永[8], Stephen Yau[17]). (V,p)を2次元正規Gorenstein特異点とする。この時 $p_g(V,p)=2$ ならば $p_a(\mathcal{Z}_0)=1$ である。 ||

これは更に，2つの方向に拡張された。ひとつは，$p_g=p_a(\mathcal{Z}_0)$ (又は $p_g=p_a$)である時，特異点がどのような制約を受けるかを調べるもので，日高一渡辺敬一[3]，渡辺公夫[16]及び筆者による研究があるが，ここでは触れないことにする。もうひとつは，やはりYauによる次のstatementである。

8) 定理(Th.3.2. Yau[17]). (V,p)を2次元正規特異点であり $p_g\neq 0$ とする。resolution manifold $\tilde{V}$ が1-convex manifoldになるようにとり，compact supportのcohomology $H^1_*(\tilde{V},\Omega^2_{\tilde{V}})$ について次の条件が成立しているとせよ。$\exists\beta\in H^1_*(\tilde{V},\Omega^2_{\tilde{V}})$, $\exists f\in\mathfrak{m}$ (maximal ideal of $\mathcal{O}_{V,p}$) s.t. $\beta, f\beta, \cdots, f^{p_g-1}\beta$ が $H^1_*(\tilde{V},\Omega^2_{\tilde{V}})$ の$\mathbb{C}$-basisをなす。すると，$p_a(\mathcal{Z}_0)=1$ である。 ||

次節では，この定理の発展したものを論ずる。

§2. 単項化定理 1) 記号. 正規2次元特異点のresolution $\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$ with $A=\bigcup_{j=1}^{m}A_j$ をとる。Iを$\mathcal{O}_{V,p}$のidealとするとき，$\tilde{V}$上のdivisor $D(I,\psi)$を

$$D(I,\psi)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\min_{f\in I}\big(\mathrm{ord}_{A_j}(\psi^*f)\big)\Big)\cdot A_j$$

と定める。また $\psi^* f$ ($f \in \mathcal{O}_{V,p}$) が定める $\tilde{V}$ 上の divisor を $\mathrm{div}(\psi^* f)$ と書き，$\{f=0\}$ on V の ψ による強変換像を $D_{f,\psi}$ と書く。特に，$\mathrm{div}(\psi^* f) = D((f),\psi) + D_{f,\psi}$ が成立する。

2) 定義　I を $\mathcal{O}_{V,p}$ の ideal，$f \in I$ とする。この時，f が I－initial element であるとは，適当な resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ が存在して関係式 $\mathrm{div}(\psi^* f) = D(I,\psi) + D_{f,\psi}$ が成立することである。

3) 注意(i) $D(\mathfrak{m},\psi)$ は極大イデアル因子と呼ばれ，Y_ψ とも書かれる。(ii) 任意のイデアル $I \subset \mathcal{O}_{V,p}$ と resolution ψ に対して元 $f \in I$ で定義(2.2)の関係が成立するものがとれる。

4) 定理（単項化定理）．(V,p) を2次元正規特異点，$\mathcal{I}$ を $\mathcal{O}_V$ の coherent ideal sheaf，そして $f \in \mathcal{I}_p$ を $\mathcal{I}_p$－initial 元とする。この時，任意の resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ について次の関係が成立する。

$$\begin{array}{ccl}
R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} & = \quad R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / f\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} & \cong H^1(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \\
& & \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\psi^{-1}(\mathcal{I})) \\
\Big\updownarrow \text{dual}/\mathbb{C} & \qquad \Big\updownarrow \text{dual}/\mathbb{C} & \\
\{\beta \in H^1_*(\Omega^2_{\tilde{V}}) \mid \mathcal{I}\cdot\beta = 0\} & = \quad \{\beta \in H^1_*(\Omega^2_{\tilde{V}}) \mid f\cdot\beta = 0\} &
\end{array}$$

（ただし，$H^1_*(\Omega^2_{\tilde{V}})$ は (1.8) と同様に 1－convex manifold $\tilde{V}$ に対して考える。）特に，$\mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = f\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ が成立する。 ||

証明は次の3つの部分 (2.5)～(2.7) に分かれる。

5) ψ を定理の通りとする。$f_1 \in \mathcal{I}_P$ を $\mathrm{div}(\psi^* f_1) = D(I,\psi) + D_{f_1,\psi}$ on $\tilde{V}$ が成立するものとする。この時, $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/f_1 R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \cong H^1(\tilde V, \mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}/\psi^{-1}(\mathcal{I}))$ である。

証明. 次の縦横の完全列からなる可換図式を見よ。

$$
\begin{tikzcd}
R^1\psi_*(\psi^{-1}(f_1)) \arrow[r] \arrow[dd, equal, "\wr"] \arrow[ddr, "a", "\wr"'] & R^1\psi_*(\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \arrow[r] \arrow[dd, "c", "\wr"'] & R^1\psi_*(\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}/\psi^{-1}(f_1)) \arrow[d, equal, "d"'] & \\
 & & 0 & \\
(f_1)\otimes R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[r, "b"', "\wr"] & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[r, "e"] \arrow[d] & R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/f_1 R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & 0 \\
 & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \arrow[d] & & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

ここで, b は積による射である。a と b の可換性は projection formula, 消滅 d は relative dim of support of $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}/\psi^{-1}(f_1)$ with respect to ψ が zero である事による。$\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Im}\, b = \mathrm{Im}\, c$ in $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ であり, 対応 f により $R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \cong R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/f_1 R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ である。　もうひとつの対応については次の可換図式を見よ。

$$
\begin{tikzcd}
R^1\psi_*(\psi^{-1}(\mathcal{I})) \arrow[r] \arrow[ddr] & R^1\psi_*(\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \arrow[r] \arrow[dd, "\wr"'] & R^1\psi_*(\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}/\psi^{-1}(\mathcal{I})) \arrow[d, equal] & \\
 & & 0 & \\
 & R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \arrow[d] \arrow[dr, "\wr"] & & \\
 & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \arrow[d] & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}/\psi^{-1}(\mathcal{I})) \arrow[l] \arrow[dr] & \\
 & 0 & & 0
\end{tikzcd}
$$

同様にして $R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}/\psi^{-1}(\mathcal{I}))$ である。 ||

6）記号を（2.5）と同様であるとする。この時

$$R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/f\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} = R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/f_1\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$$ である。

<u>証明</u>　f が $\mathcal{I}_p$-initial element であるから，適当な resolution $\psi_0:(\tilde V_0, A_0)\longrightarrow (V,p)$ が存在して，$\tilde V_0$ 上で関係式 $\mathrm{div}(\psi_0^*(f)) = D(I,\psi_0) + D_{f,\psi_0}$ が成立する。そこで ψ と ψ_0 に対応して resolution ψ_2 をとって次の図式が成立するようにする。ここで，π_0 と π_1 は proper modification である。更に $f_2\in \mathcal{I}_p$ をえらんで，$\tilde V_2$ 上で $\mathrm{div}(\psi_2^*(f_2)) = D(\mathcal{I},\psi_2) + D_{f_2,\psi_2}$ が成立するようにする。明らかに，$\mathrm{div}(\psi_0^*(f_2))$

$$\begin{tikzcd}
\tilde V_2 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \tilde V_0 \arrow[d, "\psi_0"] \\
\tilde V \arrow[r, "\psi"'] & V
\end{tikzcd}$$

$= D(\mathcal{I},\psi_0) + \pi_{2*}(D_{f_2,\psi_2})$ かつ $\pi_{2*}(D_{f_2,\psi_2}) = D_{f_2,\psi_0}$ on $\tilde V_0$, $\mathrm{div}(\psi^*(f_2)) = D(\mathcal{I},\psi) + \pi_{1*}(D_{f_2,\psi_2})$ かつ $\pi_{1*}(D_{f_2,\psi_2}) = D_{f_2,\psi}$ on $\tilde V$ である。（2,5）を用いて，$R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/f\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} =$

$$R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde V_0})/f\cdot R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde V_0}) = R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi_0)}) =$$

$$R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde V_0})/f_2\cdot R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde V_0}) = R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/f_2\cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) = R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)})$$

$$= R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/f_1\cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})$$ である。

7）f_1 について．

$$\begin{tikzcd}
R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/\mathcal{I}\cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[r, equal, "(iv)"] & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})/f_1\cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \\
\{\beta\in H^1_*(\tilde V,\Omega^2_{\tilde V}) \mid \mathcal{I}\cdot\beta=0\} \arrow[u, leftrightarrow, "(i)\ \mathrm{dual}"] \arrow[r, equal, "(ii)"'] & \{\beta\in H^1_*(\tilde V,\Omega^2_{\tilde V}) \mid f_1\cdot\beta=0\} \arrow[u, leftrightarrow, "(iii)\ \mathrm{dual}"']
\end{tikzcd}$$

が成立することを示す。

<u>証明</u>　(i) 完全列 $0 \to \mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \xrightarrow{a} R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \to R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ $\to 0$ の $\mathbb{C}$ − dual に associate して次の図式を考えよう。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\right)^* \arrow[r] & (R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V})^* \ni \langle\ ,\beta\rangle \arrow[r, "a^*"] & (\mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V})^* \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & H^1_x(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V}) \ni \beta \arrow[u, "b", "\cong"'] & &
\end{tikzcd}
$$

ここで，同型 b を Serre duality $\langle\ ,\ \rangle : R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \times H^1_x(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V}) \longrightarrow$ $\mathbb{C}$ を用いて定義するのだが，特に $\alpha \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$, $\beta \in H^1_x(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V})$ $\gamma \in \mathcal{O}_V$ に対して <u>self-adjoint property $\langle \alpha, \gamma\beta\rangle = \langle \gamma\alpha, \beta\rangle$</u> が成立するようにとる [10]。この対応により $\left(R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\right)^*$ に相当する部分を J とおくと，$\beta \in H^1_x(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V})$ について，

$\beta \in J \iff a^*(\langle\ ,\beta\rangle) = 0 \iff \langle \alpha, \beta\rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ $\iff \langle \gamma\alpha, \beta\rangle = 0 \quad \forall\alpha \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V},\ \forall\gamma\in\mathcal{I} \iff \langle \alpha, \gamma\beta\rangle = 0$ $\forall\alpha \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\quad \forall\gamma\in\mathcal{I} \iff \gamma\beta = 0 \quad \forall\gamma\in\mathcal{I}$. (i)は証明された。　(ii) Laufer の定理 [5] $H^1_x(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V}) = \Gamma(\tilde V - A, \Omega^2_{\tilde V})\big/\Gamma(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V})$ を使う。$\beta \in H^1_x(\tilde V, \Omega^2_{\tilde V})$ を $\beta = cl[\omega]$, $\omega \in \Gamma(\tilde V - A, \Omega^2_{\tilde V})$ という形に表示する。ω は有理型形式として $\tilde V$ へ延張されるが，それをやはり ω と書く。その事に気を付けて，$\mathcal{I}\beta = 0 \iff f\cdot\omega$ は正則 on $\tilde V$ $\forall f\in\mathcal{I}$. $\iff f\cdot\omega$ が定める $\tilde V$ 上の divisor $\mathrm{div}(\omega) + \mathrm{div}(\psi^*(f))$ が effective $\forall f\in\mathcal{I} \iff \mathrm{div}(\omega) + D(\mathcal{I}, \psi) \geqq 0$ $\iff f_i\cdot\omega$ が $\tilde V$ 上正則 $\iff f_i\cdot\beta = 0$. (ii)は証明された。

(iii) は(i)の特別な場合に相当する。(iv)は(i),(ii),(iii)より明らかである。

定理(2.4)の証明終わり。

§3. 不変量$L(V,p)$について　1) 正規2次元特異点のresolution $\psi:(\tilde V,A)\longrightarrow(V,p)$をとる。そして$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$の$\mathfrak{m}$-adic filtration $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\supseteqq \mathfrak{m}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\supseteqq \mathfrak{m}^2 R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\supseteqq\cdots$ を考えよう。$f_0\in\mathfrak{m}$を$\mathfrak{m}$-initial elementとすると，任意の自然数αに対してf_0^αは$\mathfrak{m}^\alpha$-initial elementである。特に$\mathfrak{m}^\alpha\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=f_0^\alpha\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$であり，上のfiltrationは$f_0$を掛けることによってできる巾zero endomorphism $f_0: R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$によって決定される。このendomorphismのnilpotency orderとして，筆者が以前導入した不変量$L(V,p)$ [11],[12]を書き直そう。

2) 定義　$L(V,p):=\min\{r\geqq 0 \mid \mathfrak{m}^r\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=0\}$.

これは明らかに
$$\begin{aligned}
&=\min\{r\geqq 0\mid f_0^r\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=0\}\\
&=\min\{r\geqq 0\mid \mathfrak{m}^r\cdot H^1_*(\Omega^2_{\tilde V})=0\}\\
&=\min\{r\geqq 0\mid f_0^r\cdot H^1_*(\Omega^2_{\tilde V})=0\}\\
&=\min\{r\geqq 0\mid \dim H^1(\mathcal{O}_{r\cdot Y_\psi})=p_g\}\\
&=\max\{\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\psi^*(f_0)]\cdot\beta\mid \beta\in H^1_*(\Omega^2_{\tilde V})\}
\end{aligned}$$
とあらわすことができる(by (2.4))。そして更に特異点(V,p)がGorensteinである場合には，resolution多様体$\tilde V$上

の標準因子 $K_{\tilde{V}}$ であって A に台が含まれるものを使って，
$L(V,p) = \min\{r \geq 0 \mid -K_{\tilde{V}} \leqq r \cdot Y_4\}$ ともあらわすこと
ができる（pp 9 − 10 [11]）。この表示は §11 で使われる。

3）命題　$L \leqq p_g$，$\dim H^1(\mathcal{O}_{Y_4}) \leqq p_g$，そして $p_g \leqq$
$L \cdot \dim H^1(\mathcal{O}_{Y_4})$ である。

証明　(2.4) と (3.1) により Jordan の分解定理より従う。 ||

4）さらに，次の 3 条件が同値であることを見ることは易しい。(i) ある $f \in \mathfrak{m}$ について，積によって生じる線型写像 $f : H_x^1(\Omega_{\tilde{V}}^2) \to H_x^1(\Omega_{\tilde{V}}^2)$ が Jordan 細胞 1 つによる行列表示を持つ（定理(1.8)の条件）(ii) $L = p_g$ であって $p_g \neq 0$。(iii) $\dim H^1(\mathcal{O}_{Y_4}) = 1$ である。　最後の条件から，$p_a(Z_0)$
$= h^1(\mathcal{O}_{Z_0}) \leqq h^1(\mathcal{O}_{Y_4}) = 1$ であり (1.6) に注意すれば (1.8) の結果が従う。

5）　筆者は以前[11]，いくつかの計算をまとめる為にこの不変量 $L(V,p)$ を導入した。この数を考えて議論することにより [11]では問題のもつ個々の側面を明確にとらえることができていたと思う。そして今，数 $L(V,p)$ は上の様な意味での $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の $\mathcal{O}_V$－加群としての構造の 1 つの側面をあらわす不変量として認識され，$L(V,p)$ を考えることの有効性は，$R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の $\mathcal{O}_V$－加群構造を考えることの有効性に吸収された。

II　正規2次元Gorenstein特異点であって $p_a=1$ であるもののresolution processに関するfoundation.

§4　p_gの計算　§I [12] に対して本質的に付け加えることはない。そこでのprincipleを復習しておく。正規2次元特異点 (V,p) について、compact解析空間 $\bar{V}$ を $V \underset{\text{open}}{\subset} \bar{V}$ となるようにとる。blowing-up with smooth centerの合成による (V,p) のresolutionをとると、次の図式ができる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
V = V_0 & \xleftarrow{\psi_1} & V_1 & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\psi_N} & V_N = \tilde{V} \\
\cap\!\| & & \cap\!\| & & & & \cap\!\| \\
\bar{V} = \bar{V}_0 & \longleftarrow & \bar{V}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \bar{V}_N = \bar{\tilde{V}}
\end{array}$$

ただし、$\psi_i : V_i \longrightarrow V_{i-1}$ はcenter $\Gamma_i \subseteq V_{i-1}$ による V_{i-1} のblowing-upであり $\bar{V}_i$ は $\bar{V}$ によってひきおこされる自然な V_i のcompact化である。Lerayのspectral sequenceにより

$$-p_g(V,p) = \chi(\mathcal{O}_{\bar{\tilde{V}}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) \right\}$$

であるが、

<u>命題</u>　$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) = \sum_{k \geq 0} \left\{ P_i(k) - \chi\left(\Gamma_i, I_{\Gamma_i}^{k} \cdot \mathcal{O}_{V_{i-1}} / I_{\Gamma_i}^{k+1} \cdot \mathcal{O}_{V_{i-1}}\right) \right\}$ ただし、I_{Γ_i} はcenterの定義イデアル、そして、$P_i(t)$ は $\mathbb{Q}$-係数1変数多項式であって $P_i(k) = \chi\left(\Gamma_i, I_{\Gamma_i}^{k} \mathcal{O}_{V_{i-1}} / I_{\Gamma_i}^{k+1} \cdot \mathcal{O}_{V_{i-1}}\right)$ (k 十分大) となるものである。

この方法で p_g を計算しようとすると、centerに対する関

数 $\left[\, k \longmapsto \chi\left(P_i,\ I_{P_i}^{k}\mathcal{O}_{V_{i-1}} \big/ I_{P_i}^{k+1}\mathcal{O}_{V_{i-1}}\right) \right]$ を知らなければならない。

§5. kによる特異点の制約　この節の前半で述べることはすでに §2 [12] で使った method であるが，まずは，それを抜き出して書いておこう。

1) 2次元正規特異点 (V, p) を $(\mathbb{C}^N, 0)$ へ埋め込み，$\mathbb{C}^N$における超平面 $H \ni 0$ と V との交わりを$(C, 0)$ とする。resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ であって $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ が $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$-invertible になるものをとると次の図式ができる。ここで，$\psi_1 : V_1 \longrightarrow V$ は blowing-up of V with center $\mathfrak{m}$，$C_1 \longrightarrow C$ は strict transform of C として ψ_1 より生ずる map，そして C' はやはり C の ψ による strict transform ((2.1)参) である。

$$
\begin{tikzcd}
V & & \tilde{V} \arrow[ll, "\psi"'] \arrow[dl, "\pi"] \\
C \arrow[u, phantom, "\cup"] & V_1 \arrow[ul, "\psi_1"] & C' \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[dl] \\
 & C_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

§2 [12] における Laufer の命題の変形として

2) 命題　上の situation で generic な（定式化できるが省略）H について，等式 $p_a(Y_\psi) = \dim \pi_*(\mathcal{O}_{C'})/\mathcal{O}_{C_1} + \sum_{k \geq 1} \{ P_{(C,p)}(k) - H_{(C,p)}(k) \}$ が成立する。ただし，$H_{(C,p)}(k) := \dim \mathfrak{m}^k \mathcal{O}_C / \mathfrak{m}^{k+1}\mathcal{O}_C$ そして $P_{(C,p)}$はそれに対する Hilbert polynomial である。

そして次の事に気をつけよう。

3) <u>定理</u> $\mathcal{O}_{C,p}$ を1次元 Cohen-Macaulay 特異点 (C,p) の局所環とすると、$H_{(C,p)}(k) \leqq P_{(C,p)}(k)$ for $\forall k$ である。‖

特に、(5.2) において $p_a(Y_\psi) \geqq 0$ であることがわかった。

さて、一般の resolution との関係については次の命題を見よ。

4) <u>命題</u> 図式

$$\begin{tikzcd} (\tilde{V}, A) \arrow[rr, "\psi"] & & (V,p) \\ & (V', A') \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\phi"'] \arrow[u, phantom, "\Omega"] & \end{tikzcd}$$

ϕ, ψ は (V,p) の resolution について (i) $p_a(Y_\psi) \geqq p_a(Y_\phi)$ である。(ii) 更に $\phi^{-1}(m)$ が $\mathcal{O}_{V'}$-invertible である時には、$p_a(Y_\psi) = p_a(Y_\phi)$ であることが $\psi^{-1}(m)$ が $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$-invertible になる為の必要十分条件である。

5) <u>系</u> (i) 任意の resolution ϕ に対して $p_a(Y_\phi) \geqq 0$ である。(ii) resolution ψ について、$\psi^{-1}(m)$ が $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$-invertible になる為の必要十分条件は、$p_a(Y_\psi)$ が $\{p_a(Y_\phi) \mid \phi : \text{resolution of } (V,p)\}$ の中で最小値をとることである。

6) 大雑把な関係であるが、まとめると

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \sum_{k \geqq 1} \{P_{(C,p)}(k) - H_{(C,p)}(k)\} && (5.2)\text{ の situation} \\ &\leqq p_a(Y_\phi) && \text{任意の resolution } \phi. \\ &\leqq p_a \end{aligned}$$

である。だが、この報告のように p_a の小さな特異点を調べる時は、細かい情報をさぐる手掛りとなる。

§6. <u>Zariski's canonical resolution</u> 1) 2次元正規特

異点 (V, p) は次の process で特異点解消することができる(by Zariski, 筆者は J. Lipman の論文によって勉強した[7])。

$\sigma_1 ; V_1 \longrightarrow V$ the blowing-up of V at p,

$T_1 ; \tilde{V_1} \longrightarrow V_1$ the normalization of V_1

$\sigma_2 ; (\tilde{V_1})_1 \longrightarrow \tilde{V_1}$ the blowing-up of $\tilde{V_1}$ at a point in $\mathrm{Sing}(\tilde{V_1})$

$T_2 ; (\tilde{V_1})_1^{\sim} \longrightarrow (\tilde{V_1})_1$ the normalization. 等々と続く。

そして、有限回で終わる。これを Zariski's canonical resolution (Z.C.R. と略す) と呼ぶ。

2) 定理 (V, p) を 2 次元正規 Gorenstein 特異点であって $p_a = 1$ であるとすると、Z.C.R. は次のような blowing-up の合成に分解される。

$$
(*)\quad
\begin{array}{ccccccc}
W = W_0 & \longleftarrow & W_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & W_N \\
\cup\!\shortparallel & & \cup\!\shortparallel & \psi_1 & & \psi_N & \cup\!\shortparallel \\
V = V_0 & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_N
\end{array}
$$

ここで $V \subseteq W$ は minimal embedding であるとする。ψ_i は W_{i-1} の smooth center $\Gamma_i \subset V_{i-1}$ による blowing-up であり、そして V_i は V_{i-1} の strict transform である $(1 \leqq i \leqq N)$。更に、ある数 $M (\leqq N)$ について次の諸性質が成立する (i) V_i は正規である for $i \leqq M$.
(ii) ψ_i は blowing-up with point center $p_i (= \Gamma_i)$ であり、かつ (V_{i-1}, p_i) は Gorenstein of maximal embedding dimension (例1 [12] を見よ) であり重複度は 3 以上であ

る for $i \leqq M$ (iii) 一般に，正規である V_i 上には non-rational point は高々1つである。(iv) V_Mの任意の点での重複度は2以下である。(v) V_M のZ.C.R.の各正規化はそれぞれ blowing-up along (reduced) $\mathbb{P}^1$ 1回で得られる。

3) 証明に於いて（Reidの論文[9]におけるのと同様に）$gr_m(\mathcal{O}_V)$ のGorensteinnessに関するJ.Sallyの研究結果が重要な役割を果すことも注意しておく。

4) 上記の図式(*)のVをcompact化して§4のようなcompact解析空間のmodificationの列を考え，$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i})$の変化を調べよう。そこで $\{j_1=1<\cdots<j_M=M<j_{M+1}<\cdots<j_F\}$ を $\{1,\cdots,N\}$ の部分集合であって，ψ_{j_k} が blowing-up with point center of multiplicity $\geqq 3$ であるか，または with center $\mathbb{P}^1$ であるようなもの全体とする。

5) <u>命題</u> 2次元正規Gorenstein特異点(V,p)のZ.C.R.が(6.2)(*)の条件を満たすblowing-upの合成で得られたとせよ（$p_a=1$である必要はない）。すると，(i) $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}})=-1$ for $i=j_1,\cdots,j_F$ (ii) $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}})=0$ for other i，特に，$F=p_g(V,p)$である。

6) 我々はZ.C.R.について考察したわけだが，これがその他のresolution，特にminimal resolutionとどの様な関係を持つのかというのは，自然な問題であろう。それは§9において答えられるが，それを理解する為には次の2つの事(§7, §8)

を考察する必要がある。

§7 canonical divisor

1) 定理　2次元正規Gorenstein特異点(V, p)のZ.C.R.が(6.2)(*)の条件を満たすblowing-upの合成で得られたとせよ($p_a=1$である必要はない)。$\{j_1,\cdots,j_{p_g}\}$を(6.4)(6.5)のindex setとし，K_{V_N}をV_Nのcanonical divisorであって台がresolution $V_N \longrightarrow V$の例外集合に含まれるものとすると，

$$K_{V_N} = \sum_{h=1}^{p_g} -W_{j_h}$$

である。ただし，divisor W_i on V_Nは $\mathcal{I}_{W_i} = \mathcal{O}_{V_N}(-W_i) = (\psi_N\circ\cdots\circ\psi_i)^{-1}(\mathcal{I}_{\Gamma_i})\cdot\mathcal{O}_{V_N}$で定義されるものである。‖

2) これを証明することについて，いったい何が問題なのかという事について以下では論ずる。$\psi_1,\cdots,\psi_N$の合成をψと書くことにする。定理の右辺のdivisorはambient space U_N上のdivisorのV_Nへの制限と書けている。つまり「U_N上のdivisor Dであって台が$|\psi^{-1}(p)|$に含まれていて，かつ$D|_{V_N} = K_{V_N}$となるものを見出すこと」が問題となる。更に，$\psi : U_N \longrightarrow U$のfunctional determinant E_ψを用いて，$\mathcal{O}_{U_N}([E_\psi]) = \Omega^{\dim U}_{U_N}$と書けることに気をつければ「$U_N$上のdivisor Gであって$|\psi^{-1}(p)|$に台が含まれていて，かつ $\mathcal{E}xt^{\dim U-2}_{\mathcal{O}_{U_N}}(\mathcal{O}_{V_N}, \mathcal{O}_{U_N}([G])) \cong \mathcal{O}_{V_N}$ となるもの

を見出すこと」という adjunction formula に関する問題と同値である。それは $N=1$ の場合に限っても難しさは変わらない。$N=1$ の時は「 $\mathcal{E}xt^{\dim U-2}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_{V_1}, \mathcal{O}_{U_1}(\alpha[|\psi^{-1}(p)|])) \cong \mathcal{O}_{V_1}$ となる整数 α が存在するか？そして存在すれば求めよ」という問題である。これは $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{k\geq 0} m^k\mathcal{O}_U)$ 上の問であり，肯定的に解ける為のひとつの十分条件として「$\bigoplus_{k\geq 0} m^k\mathcal{O}_U$ 上で $\bigoplus_{k\geq 0} m^k\mathcal{O}_V$ が T.N.-isomorphism の意味で self-duality を持つ projective free resolution を有する」という条件がある。筆者は (V,p) が Gorenstein of maximal embedding dimension 1 になることと，それに対する J. Sally の研究，及び J. Wahl による Artin-Rees 定理の精密化を用いて上の条件をチェックし定理を導いた。

§8 elliptic sequence　　1）(V,p) を正規2次元特異点，そして $\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$ を resolution とせよ。B を $\tilde{V}$ 上の reduced connected divisor で $B\subseteq A$ なるものとします。この時 B 上の fundamental cycle を Z_B と書くことにします。

2）命題　上の situation に於いて，reduced connected divisor on $\tilde{V}$ の集合 $\{C_i; i=1,\cdots,r\}$ が $C_i\subseteq A$ $\forall i$ であって，かつ $i\neq j$ ならば C_i と C_j は irreducible component を共有しないものが与えられたとせよ。すると，次の不等式が成立す

3。 $\sum_{i=1}^{r} p_a(Z_{C_i}) \leqq p_a(Z_0)$ //

これは Laufer の computation sequence により容易に証明できますが，これを念頭に置いて我々の elliptic sequence を導くしよう。

3) 定義 (elliptic sequence). (V,p) を正規2次元特異点であって $p_a(Z_0)=1$ であるとせよ。resolution $\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$ with $A=\bigcup_{j=1}^{m}A_j$ に対して reduced connected divisor on $\tilde{V}$ の集合 $\{B_i : i=1,\cdots,l\}$ を次のような標準的な帰納的手続きで定める。(i) $B_1 := A$。(ii) B_i から B_{i+1}. まず $\hat{B}_i$ を $\hat{B}_i := \bigcup_{A_j \subseteqq B_i,\ A_j\cdot Z_{B_i}=0} A_j$ と置け。そして，$\hat{B}_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} D_{ij}$;(D_{ij} は $\hat{B}_i$ の連結成分) と分解せよ。ここでもし $p_a(Z_{D_{ij}})=0\ \forall j$ ならば手続きは終わりであり，$\{Z_{B_1},\cdots,Z_{B_l}\}$ を elliptic sequence と呼ぶ。また，もし $p_a(Z_{D_{ij}})=1$ となる j が存在すれば，そんな j は丁度ひとつである (8.2) ので $B_{i+1} := D_{ij}$ とする。$(A_i\cdot A_j)$ が負定値であり，$\hat{B}_i$ は B_i の真部分集合になるから，この操作は有限回で終わる。

4) 定理 $\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$ を特異点 (V,p) の resolution とし $p_a(Z_0)=1$ であり，$\{Z_{B_i};i=1,\cdots,l\}$ を $\tilde{V}$ 上の elliptic sequence とする。すると，$\{D$: non-zero effective divisor on $\tilde{V}$ such that (i) $|D|\subset A$ (ii) $D\cdot A_j \leqq 0\ \forall j$. (iii)

$p_a(D) = p_a\}$ $=$ $\left\{ \sum_{i=1}^{k} Z_{B_i} \,;\, k=1,\cdots,\ell \right\}$ かつ，$\sum_{i=1}^{\ell} Z_{B_i}$ は $p_a(D)=1$ となる $|D| \subset A$，$D>0$ なる divisor の中での最大元として特徴づけられる。

5) 注意 (i) minimal good resolution ψ に対しては，我々の elliptic sequence は勿論 Yau の elliptic sequence と一致する。(ii) 定理(8.4)は次の有名な命題の証明を含んでいる。「$p_a(Z_0)=1$ ならば $p_a=1$ である。」なおこの命題は，Laufer や渡辺公夫によっても証明されているが，筆者は Wagreich の original なアプローチを見ながら自分流に証明しているうちに定理(8.4)にたどり着いてしまった。 (iii) 定理により，Laufer sequence [18] $=$ elliptic sequence であることも容易に確めることができる。なおこの等号は J. Stevens も証明している。

6) 命題 elliptic sequence は次の意味で invariant である。

$$\begin{tikzcd} \tilde{V} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & V \ni p \\ & V' \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

ψ と ϕ を $p_a(Z_0)=1$ を満たす特異点 (V,p) の resolution とし，τ で左図の様に結ばれているものとする。$\{Z_{B_i}\,;\, i=1,\cdots,\ell\}$ と $\{Z_{B_i'}\,;\, i=1,\cdots,\ell'\}$ をそれぞれ $\tilde{V}$ と V' 上の elliptic sequence とすると，$\ell=\ell'$ であり，かつ $\tau^{-1}(Z_{B_i'}) = Z_{B_i}$ $\forall i$ である。

7) 定理 (Yau [17,18]) $p_a(Z_0)=1$ である特異点 (V,p) に対して $p_g \leq \#\{\text{elliptic sequence } \{Z_{B_i}\,;\, i=1,\cdots,\ell\}\} = \ell$ で

ある。

§9 Z.C.R. と minimal resolution の関係

1) 2次元正規 Gorenstein 特異点 (V,p) の Z.C.R. が (6.2) の(*)の条件を満たす blowing-up の合成で得られたとせよ($p_a=1$ であることは仮定しない)。その時，次の p_g 個の点に名前を付けることにする。

定義　上のような時，次の normal point q を starting point (出発点) と呼ぶ。(i) (V,p) (ii) $q\in V_{j_h}$ であって $p_g(V_{j_h},q)\neq 0$ であるもの。 //

そして，index の集合 $\{i_1<\cdots<i_{p_g}\}$ を $\{1,\cdots,N\}$ の部分集合であって，ψ_{i_h} が blowing-up at starting point であるようなものとなるように定める。この定義により，

$$1=i_1=j_1,\ \cdots,\ i_M=j_M=M,\quad i_h<j_h \text{ for } h\geq M+1$$

である。また $i_h=j_{h-1}+1$ for $h=2,\cdots,p_g$ であることも明らかである。このような index を用いて，我々の結果を述べよう。

2) 定理　(V,p) を正規2次元 Gorenstein 特異点であって

$$\begin{tikzcd} \tilde{V} \arrow[rr, "\psi"] & & V \\ & V_N \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

$p_a=1$ であるものとし，左の可換図式を考える。ここで ψ は minimal resolution of (V,p), $\phi: V_N\to V$

は定理(6.2)によって得られたZ.C.R.の blowing-up への分解, そして τ は $\phi = p \circ \tau$ を満たす morphism である。$\tilde{V}$ 上の elliptic sequence を $\{Z_{B_i}\,;\, i=1,\cdots,\ell\}$, V_N 上の divisors $\{W_i\,;\, i=1,\cdots,N\}$ を§7で定義したものとする。この時,

(i) 整数の列 $1 \leq k_1 < \cdots < k_{p_g} = \ell$ が存在して, 次の関係式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{k_1} Z_{B_i} = \tau_*(W_{i_1}) = \cdots = \tau_*(W_{j_1})$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=k_{h-1}+1}^{k_h} Z_{B_i} = \tau_*(W_{i_h}) = \cdots = \tau_*(W_{j_h})$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=k_{p_g-1}+1}^{k_{p_g}} Z_{B_i} = \tau_*(W_{i_{p_g}}) = \cdots = \tau_*(W_{j_{p_g}}).$$

(ii) 更に, $k_{p_g-1} = \ell-1$, すなわち $\tau_*(W_{i_{p_g}}) = \cdots = \tau_*(W_{j_{p_g}})$ は $(\tilde{V}, A)$ 上の minimal elliptic cycle に一致する。

3) 系 上の situation に於いて, length of the elliptic sequence $\ell = p_g$ (この場合, (V,p) は maximally elliptic singularity と呼ばれる(極大楕円型特異点)) ならば $Z_0 = \tau_*(W_1)$ (すなわち maximal ideal cycle) である。//

更に, 次の定理も比較的容易に証明できる。

4) 定理 (V,p)を2次元正規Gorenstein特異点であって$p_a=1$を満たすものとし，$\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$をminimal resolution，そして$\tilde{V}$上のdivisor Eをminimal elliptic cycleであるとせよ。この時，(i) Z.C.R. of (V,p)がminimal resolutionを与える為の必要十分条件は$E^2\leqq-2$であることである。(ii) (V,p)がabsolutely isolated singularity（すなわち，Z.C.R.におけるnormalizationがすべてtrivialなもの）である為の必要十分条件は$E^2\leqq-3$であることである。//

5) ここで述べられたstatementの原型はLauferのminimally elliptic singularityに対する仕事にある（Th. 3.13, Th. 3.15 [6]）。それは，Stephen Yauにより更に一般な$p_a=1$なる特異点の研究に拡張された（[14]にあげたYauの諸文献を見よ）。彼等のmethodと我々のmethodの間には共通する部分もあるがハードanalysisの部分で根本的に相違がある。彼らは，resolution多様体上のcohomology群に対して，いわゆるLaufer type vanishing theoremと呼ばれるnumericalなアプローチを行う（Chapter II [7]）。我々は，局所環$\mathcal{O}_{V,p}$のinvariant（例えばHilbert-Samuel関数，reduction exponent）に関する解析（J. Sally等による）を基礎としている。

III 関係式 $L = p_g$ を満たす2次元正規Gorenstein特異点の resolution process の言葉による特徴づけ.

§10. Iでとりあげた $L = p_g$ を満たす特異点(3.4)をIIの理論を基礎にして解析する。(我々は $p_g \neq 0$ である場合に興味がある。)

1) 定理 (V,p) を正規2次元Gorenstein特異点であるとせよ。すると次の4条件は同値である。

(i). $L(V,p) = p_g(V,p)$ であるI((3.4)を見よ)。

(ii)−1. (V,p) のZ.C.R.は(6.2)(＊)の条件を満たすblowing-upの合成で得られ,更に W,p ($\dim W = \dim m_V/m_V^2 = \rho$ とする。)の regular parameter system $(x_1, \cdots, x_\rho)$ があって,超平面 $\{x_i = 0\}$ の strict transform がすべての starting point を通る, for $i = 2, \cdots, \rho$.

(ii)−2. (V,p) のZ.C.R.は(6.2)(＊)の条件を満たすblowing-upの合成で得られ,更に W 内に smooth curve l が存在して,その strict transform 上にすべての starting point はのる。

(ii)−3. (V,p) のZ.C.R.は(6.2)(＊)の条件を満たすblowing-upの合成で得られ,更に $P_{i_1}, \cdots, P_{i_{p_g}}$ をすべての starting point とすると,index集合の関係式

$\{j \in \{1, \cdots, i-1\} \mid P_i \subseteq (\varphi_i \circ \cdots \circ \varphi_j)^{-1}(P_j) \text{ in } V_{i-1}\}$

$=\{i-1\}$ が i_{p_g} 以下の i について成立する。

2）極大楕円型特異点が $L=p_g$ を満たすことは系(9.3)と(3.4)よりわかるから，上の定理が適用できる。

この他，$L=p_g$ を満た特異点について，筆者が得て来た結果及び observation 等は [11], [12], [13] を見て下さい。ここでは，残りの部分を定理の証明にあてる。

§11. 定理(10.1)の証明（その1）

1）(ii)−2 ⇒ (ii)−1　I_l を $\mathcal{O}_V$-ideal sheaf であって l を定めるものとする。$x_1, \cdots, x_p$ を p における I_l の minimal generator とすると，strict transform の定義（chapter IV [4]）により　$\{x_i=0\}$ の strict transform $\geqq$ l の strict transform が各 stage で成立する。

2）(ii)−1 ⇒ (i)　定理(6.2)(※)の条件を満たす blowing-up の合成による resolution $V_N \longrightarrow V$ について，$x_1, \cdots, x_p$ を (ii)−1 のような $\mathcal{O}_{V,p}$ の regular system parameter とする。V_N 上定まる divisor　$\mathrm{div}((\psi_1\circ\cdots\circ\psi_N)^*(x_i))$ について

$$\mathrm{div}((\psi_1\circ\cdots\circ\psi_N)^*(x_i)) \geqq \sum_{h=1}^{p_g} W_{i_h}$$

が $i=2,\cdots,p$ について成立するが，$W_{i_h} \geqq W_{j_h}$ に注意して定理(7.1)により，関係式　$\mathrm{div}((\psi_1\circ\cdots\circ\psi_N)^*(x_i)) + K_{V_N} \geqq 0$ が $i=2$,

$\cdots, \rho$ について成立する。$V-p$ 上の nowhere vanishing 正則2形式 ω をひとつとり，固定して，$H^1_x(\tilde{V}, \Omega^2_{\tilde{V}}) = \mathcal{O}_V \cdot ck[\omega] = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_\rho] \cdot ck[\omega]$ と書くと，$x_i \cdot ck[\omega] = 0$ が $i = 2, \cdots, \rho$ について，上で示されたので．$H^1_x(\tilde{V}, \Omega^2_{\tilde{V}}) = \mathbb{C}[x_1]\, ck[\omega]$ となる。

3)　以下この§は (i) ⇒ (ii)-3 の証明に費される。Yau の定理 (1.8) により $p_a(V, p) = 1$ であり，定理 (6.2) の (*) を満たす resolution として Z.C.R. が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc} U = U_0 & \leftarrow & U_1 & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & U_N \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ V = V_0 & \xleftarrow{\psi_1} & V_1 & \leftarrow & \cdots & \xleftarrow{\psi_N} & V_N . \end{array}$$

ここで U_i 上の divisor $\psi_i^{-1}(\Gamma_i)$ を $\Theta_i^{(i)}$，そして U_j におけるその strict transform を $\Theta_i^{(j)}$　$(j > i)$ と書く。

議論を算術的にする為に index 集合 Λ_i を $\Lambda_i = \{j \in \{1, \cdots, i-1\} \,/\, \Gamma_i \subseteq \Theta_j^{(i-1)} \text{ in } U_{i-1}\}$，そして整数の集合 $\{ S_i^{(j)} ; i, j \in \{1, \cdots, N\} \}$ を $\underline{S_i^{(j)} = 0 \quad i < j,}$ $\underline{S_i^{(i)} = 1, \quad S_i^{(j)} = \sum_{k \in \Lambda_i} S_k^{(j)} \quad i > j,}$ として定める。我々は $\Lambda_i = \{i-1\}$ が i_B 以下の i について成立することを示したいのであるが，次の事実は容易にチェックできる。

4) <u>補題</u>　整数 i_0 in $\{1, \cdots, N\}$ について，次の3

条件は同値である。(i) $\Lambda_i=\{i-1\}$ for $i\leqq i_0$. (ii) $s_i^{(j)}=1$ for (i,j) such that $1\leqq j\leqq i\leqq i_0$. (iii) $s_{i_0}^{(1)}=1$.

5) 一般に V_N 上の divisor W_i は $W_i=\left(\sum_{j=1}^{N} s_j^{(i)}\cdot\Theta_j^{(N)}\right)\Big|_{V_N}$ と表わされる。だから，定理(7.1)により $-K_{V_N}=$

$$\sum_{k=1}^{p_g}\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^{(j_k)}\cdot\Theta_i^{(N)}\right)\Bigg|_{V_N}=\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\sum_{k=1}^{p_g} s_i^{(j_k)}\right)\cdot\Theta_i^{(N)}\right)\Bigg|_{V_N}$$

となる。そこで，整数の集合 $\{l_i;\ i=1,\cdots,N\}$ を

$$l_i=\min\left\{\alpha\in\mathbb{Z}\ \Big|\ \sum_{k=1}^{p_g} s_i^{(j_k)}\leqq\alpha\cdot s_i^{(1)}\right\}\ \text{for } i=1,\cdots,N$$

として定めよう。すると，(3.2)の表示 $L(V,p)=\min\{\alpha\in\mathbb{Z}\mid -K_{V_N}\leqq\alpha\cdot W_1\}$ に気をつければ，不等式 $L(V,p)\leqq\max_{1\leqq i\leqq N} l_i$ の成立がわかる。また、次の事実は容易に確めることができる。

6) <u>補題</u> (i) $l_1=1$ (ii) $i\notin\{j_1,\cdots,j_{p_g}\}$ ならば，$\max_{1\leqq j\leqq i} l_j=\max_{1\leqq j\leqq i-1} l_j$ である。(iii) $i\in\{j_1,\cdots,j_{p_g}\}$ ならば $\max_{1\leqq j\leqq i} l_j\leqq\max_{1\leqq j\leqq i-1} l_j+1$ である。特に，$\max_{1\leqq j\leqq N} l_j\leqq p_g(V,p)$ が成立する。

7) これより $L=p_g$ ならば $p_g=\max_{1\leqq j\leqq N} l_j$ そして，$\max_{1\leqq j\leqq j_k} l_j=k$ for $k=1,\cdots,p_g$ が従う。これは $l_{j_k}=k$ for $k=1,\cdots,p_g$ であることを導くが，これから，$s_{j_k}^{(1)}=1$ for $k=1,\cdots,p_g$ を k についての帰納法により証明しよう。まず，$k=1$ については定義により $s_{j_1}^{(1)}=$

$S_1^{(1)}=1$ である。次に，ある整数 $\mu\ (\geqq 1)$ に対して $S_{i_\mu}^{(1)}=1$ が成立したと仮定せよ。補題(11.4)により $\Lambda_i=\{i-1\}$ for $i\leqq i_\mu$ である。$S_{i_\mu}^{(1)}=\cdots=S_{i_\mu}^{(i_\mu)}=1$ であり，また $i_\mu\leqq\beta\leqq j_{p_g}$ なる β に対して $\Lambda_\beta\subseteqq\{i_\mu, i_\mu+1,\cdots,N\}$ である。$\{S_i^{(j)}\}$ の定め方により，$\alpha\leqq i_\mu$ かつ $i_\mu\leqq\beta\leqq j_{p_g}$ である (α,β) について $S_\beta^{(\alpha)}=S_\beta^{(1)}$ がわかる。特に $l_{j_\mu+1}$ の計算は

$$l_{j_\mu+1}=\min\{\alpha\in\mathbb{Z}\mid \sum_{=1}^{p_g}S_{j_\mu+1}^{(j_\mu)}\leqq\alpha\cdot S_{j_\mu+1}^{(1)}\}$$
$$=\min\{\alpha\in\mathbb{Z}\mid(\mu-1)S_{j_\mu+1}^{(1)}+S_{j_\mu+1}^{(j_\mu)}+1\leqq\alpha\cdot S_{j_\mu+1}^{(1)}\}$$

となる。ところが $l_{j_\mu+1}=\mu+1$ となるのだから，$S_{j_\mu+1}^{(j_\mu)}\geqq S_{j_\mu+1}^{(1)}$ でなければならない。一般には $S_\beta^{(\alpha)}\leqq S_\beta^{(\gamma)}$ for $\alpha\geqq\gamma$ であるから $S_{j_\mu+1}^{(j_\mu)}=S_{j_\mu+1}^{(1)}$ が成立する。ゆえに $\sum_{h\in\Lambda_{j_\mu+1}}S_h^{(j_\mu)}=\sum_{h\in\Lambda_{j_\mu+1}}S_h^{(1)}$ である。やはり $S_h^{(j_\mu)}\leqq S_h^{(1)}$ であることにより，$S_h^{(j_\mu)}=S_h^{(1)}$ for $h\in\Lambda_{j_\mu+1}$ である。(特に $j_{\mu+1}-1\in\Lambda_{j_{\mu+1}}$ に気をつけて) この議論をくり返して，等式 $S_h^{(j_\mu)}=S_h^{(1)}$ for h such that $j_\mu\leqq h\leqq j_{\mu+1}$ が得られる。特に $i_{\mu+1}=j_\mu+1$ に気をつけて $S_{i_{\mu+1}}^{(1)}=S_{i_{\mu+1}}^{(j_\mu)}=S_{j_\mu+1}^{(j_\mu)}=\sum_{h\in\Lambda_{j_\mu+1}}S_h^{(j_\mu)}=S_{j_\mu}^{(j_\mu)}=1$. である。

§12. 定理(10.1)の証明 (その2) (ii)-3 ⇒ (ii)-2.

もう少し一般に，次の situation で命題を考える。

$$\begin{tikzcd} U = U_0 & U_1 \arrow[l, "\psi_1"'] & \cdots \arrow[l] & U_R \arrow[l, "\psi_R"'] \arrow[lll, bend left, "\Psi"] \end{tikzcd}$$

ここで U_i は n 次元多様体であり，$\psi_i : U_i \longrightarrow U_{i-1}$ は non-singular subvariety Γ_i of U_{i-1} であり，そして Ψ は $\psi_1, \cdots, \psi_R$ の合成とする。記号 $\Theta_i^{(j)}$ や Λ_i は §11 と同様に定義する。主張 (ii)−3 ⇒ (ii)−2 より一般的な次の事が成立する。

1）<u>定理</u> 上の situation で条件 $\Lambda_i = \{i-1\}$ が R 以下の i で成立しており，$\bigcup_{i=1}^{R-1} \Theta_i^{(R)}$ に含まれない $\Theta_R^{(R)}$ の点 p が与えられているとせよ。すると $\Psi(p)$ の近傍において smooth curve l in U があって，l の U_R における strict transform が p を通る。特に任意の U_i において，この l の strict transform が p の image を通る。//

2）以下この定理の証明を行う。U_{i-1} の点 $(\psi_i \circ \cdots \circ \psi_R)(p)$ を p_i と書く。話は $|\Psi^{-1}(\Psi(p))|$ の近傍に限られる。smooth curve $\tilde{l}$ in U_R であって次の条件が成立するものをとる。

$$l_{\tilde{l}} + l_{\Theta_R^{(R)}} = m_p \text{ in } \mathcal{O}_{U_R, p}.$$

我々は $\Psi_*(l_{\tilde{l}})$ が U 内の smooth curve を定めることを証明したいのだ。その為に

<u>Claim</u> (i) $\psi_{R*}(l_{\tilde{l}})$ は p_R を通る U_{R-1} 内の smooth curve を定める。(ii) $\psi_{R*}(l_{\tilde{l}}) + l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} = m_{p_R}$ in $\mathcal{O}_{U_{R-1}}$

(iii) $P_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-2} \Theta_i^{(k-1)}$ 勿論. $P_k \in \Theta_{k-1}^{(k-1)}$ .//.

これらが，我々の仮定から導かれれば，明らかにStep by Stepに U_{i-1} 内にsmooth curveが定まり，我々の定理を得る。

3) <u>補題</u>　$R^1\psi_{k*}(l_{\tilde{e}}\cdot(l_{\Theta_k^{(k)}})^{\nu})=0$ for $\nu \geqq 0$.

証明は省略する。

4) <u>Claim (i) の証明</u>　位相的には，$\psi_k(\tilde{e})$ と $\tilde{e}$ は同型である。そして補題により $0 \to \mathcal{O}_{U_{k-1}}/\psi_{k*}(l_{\tilde{e}}) \to \psi_{k*}(\mathcal{O}_{U_k}/l_{\tilde{e}}) \to 0$ を得る。（完全列）ゆえに，$\psi_{k*}(l_{\tilde{e}})$ の定めるcurveは $\tilde{e}$ と同型でありsmoothである。

5) <u>Claim (ii) の証明</u>．まず議論をmaximal idealがcenterとなる場合に帰着させる。$\tilde{e}$ のとり方より $l_{\tilde{e}} \cap l_{\Theta_k^{(k)}} = l_{\tilde{e}}\cdot l_{\Theta_k^{(k)}}$ が成立する。ゆえに補題の $\nu=1$ の場合に気をつけて，完全列

$$0 \to \psi_{k*}(l_{\tilde{e}} \cap l_{\Theta_k^{(k)}}) \to \psi_{k*}(l_{\tilde{e}}) \oplus \psi_{k*}(l_{\Theta_k^{(k)}}) \to \psi_{k*}(l_{\tilde{e}}+l_{\Theta_k^{(k)}})$$
$$\to R^1\psi_{k*}(l_{\tilde{e}} \cap l_{\Theta_k^{(k)}}) = R^1\psi_{k*}(l_{\tilde{e}}\cdot l_{\Theta_k^{(k)}}) = 0$$

が従うが，$\tilde{e}$ のとり方より $\psi_{k*}(l_{\tilde{e}}+l_{\Theta_k^{(k)}}) = \mathfrak{m}_{P_k}$ であり $\psi_{k*}(l_{\Theta_k^{(k)}} \cap l_{\tilde{e}}) = \psi_{k*}(l_{\Theta_k^{(k)}}) \cap \psi_{k*}(l_{\tilde{e}})$ (Lemma (1.6) [14]) であるから $\psi_{k*}(l_{\tilde{e}}) + \psi_{k*}(l_{\Theta_k^{(k)}}) = \mathfrak{m}_{P_k}$ である。

そして $\psi_{k*}(l_{\Theta_k^{(k)}}) = l_{\Gamma_k}$ である。

ゆえに，center Γ_k の次元を k とすると，P_k における $\mathcal{O}_{U_{k-1}}$ の regular parameter system $u_1, \cdots, u_n$ を

$l_{\Theta_R^{(R)}} = u_1 \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}}$, $l_{P_R} = (u_1, \cdots, u_{n-k}) \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}}$, として $\psi_{R*}(l_{\tilde{e}}) \supseteq (u_{n-k+1}, \cdots, u_n) \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}}$ が成立するようにとれる。$(u_{n-k+1}, \cdots, u_n)$ で定義される U_{R-1} の部分多様体を A とし，その ψ_R による strict transform を $(A)_1$ とする。$\psi_{R*}(l_{\tilde{e}}) = l_{e'}$ によって定まる curve を l'；そして ψ_R による strict transform（$\tilde{l}$ のことだが）を $(l')_1$ と書くと，$l' \subset A$ であり，$(l')_1 \cap (A \cap \Theta_{R-1}^{(R-1)})_1 \subseteq \tilde{l} \cap \Theta_{R-1}^{(R)} = \phi$ が仮定より従う。A に制限して Claim(ii) が言えればよい（すなわち $l_{e'} + (u_{n-k+1}, \cdots, u_n) \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}} + u_1 \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}} = m_{P_R}$ が証明できれば）$l_{e'} + l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} = m_{P_R}$ がしたがう。A に制限すると blowing-up の center は $l_{P_R} + (u_{n-k+1}, \cdots, u_n) = m_{P_R}$ である。

ゆえに，はじめから $l_{P_R} = m_{P_R}$ と仮定して証明する。$P \notin \Theta_{R-1}^{(R)}$ だから $\Theta_{R-1}^{(R)} \cap (\tilde{l} \cap \Theta_R^{(R)}) = \mathrm{Proj}\left(gr_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}}) / gr_m(l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}}) + gr_m(l_{e'}) \right)$ は空集合である。ゆえに $gr_m(l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}}) + gr_m(l_{e'})$ は $gr_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}})$ と T.N.-isomorphic である。ところが，$gr_m(l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}})$ と $gr_m(l_{e'})$ はそれぞれ degree 1 の元で生成されているので $m \cdot gr_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}}) = gr_m(l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}}) + gr_m(l_{e'})$ であり，$m \cdot gr_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}}) = gr_m(l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} + l_{e'})$ が成立する。ゆえに $m_{P_R} = l_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} + l_{e'}$ である（Lemma 6 of Chapter III [4]）。

6) <u>Claim (iii) の証明.</u> 我々は $j \leqq R-2$ なる j を固定する。仮定より divisor $\Theta_j^{(R-1)}$ は P_R を含まない。ゆえに $\Theta_j^{(R-1)}$ の ψ_R による strict transform は total transform に一致する。$p \notin \Theta_j^{(R)}$ であるから $P_R \notin \Theta_j^{(R-1)}$ がこれより従う。

以上で定理(10.1)の証終.

<u>(1.6)の(iv)について.</u> 講演では,もう少し強く「$P_a \geqq 1$ の時. P_a を fix して, P_g はいくらでも大きなり得る」と言ったが,実は,わかっていない事であった。P3の形に訂正します。

<u>文献表.</u>

[1]. Artin, M.: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces. Amer. J. Math. 84, 485–496 (1962).

[2] ———: On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math., 88. 129–136 (1966).

[3]. Hidaka, F., Watanabe, Kei-i.: Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor. Tokyo J. Math., 4, 319–330 (1981).

[4] Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I. II. Ann. Math.,

79, 109 – 326 (1964).

[5] Laufer, H. B.: On rational singularities. Amer. J. Math., 94 (1972) 597 – 608.

[6] ——————: On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math., 99, (1977) 1257 – 1295.

[7] Lipman, J.: Rational singularities ---. Publ. I.H.E.S. 36. 195 – 279 (1969).

[8] Ohyanagi, S., Yoshinaga, E.: A criterion for 2-dimensional normal singularities to be weakly elliptic, Science reports of Yokohama National Univ. Ser II. vol 26, 5 – 7 (1979).

[9] Reid, M.: Canonical 3-folds, Journees de geometrie algebrique d'Anger 1979, "Algebraic geometry" edited by A. Beauville, Sijthoff and Noordhoff, 273 – 310 (1980).

[10] Serre, J. P.: Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29, 9 – 26 (1955).

[11] Tomari, M.: A geometric characterization of normal two-dimensional singularities of multiplicity two with $p_a \leqq 1$, Publ. R.I.M.S, Kyoto Univ. 20., 1 – 20 (1984).

[12] ——————: 幾何種数の計算公式と楕円型特異点について, 数理研講究録 474, (1982) 98 – 116.

[13] ——————: On resolution process of normal Gorenstein

surface singularity with $p_a \leqq 1$, Proc. Japan Academy 59 No 5. 211 – 213 (1983).

[14] ________: A p_g-formula and elliptic singularities. preprint R.I.M.S. No 458 (October 1983).

[15] Wagreich, P.: Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math., 92, 419 – 454 (1970).

[16] Watanabe Kimi.: On plurigenera of normal isolated singularities I. Math. Ann., 250, 65 – 94 (1980).

[17] Yau, Stephen, S.-T.: On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 257, 269 – 329 (1980).

[18] ________: On strongly elliptic singularities, Amer. J. Math., 101, 855 – 884 (1979).